Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis III — WS 2012/13, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 21.1.2013
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $U := (0,1) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ und $V := \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ und

$$\Phi(r, \varphi, z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Zylinderkoordinatenabbildung. Sei g die induzierte Metrik. Berechnen Sie Zylinderkoordinatendarstellung von div_g, grad_g und Δ_g.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1 x_3 - x_2^2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_2 x_4 - x_3^2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_1 x_4 - x_2 x_3. \end{aligned}$$

Man zeige, dass $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0\}$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien r, R reelle Zahlen mit $0 < r < R$ und K die Kreislinie

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - R)^2 + z^2 = r^2, y = 0\}.$$

Durch Rotation von K um die z-Achse entsteht ein Torus $T \in \mathbb{R}^3$. Man berechne seine Flächeninhalt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Wir betrachten die Eulersche Beta-Funktion $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1} dt.$$

Beweisen Sie folgenden Zusammenhang zur Gamma-Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Hinweis: Substituieren Sie in $B(p, q)$ $t := \sin^2\varphi$ und benutzen Sie im Integral $B(p, q)\Gamma(p + q)$ die Transformationsformel des Integrals beim Übergang zwischen Polar- und euklidischen Koordinaten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 28.1.13 bis 12:00**.